ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ (Β.Ο.Π) :

1ο ΘΕΜΑ

© Only Maths

ΣΥΝΕΧΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ :

συνεχής χώρος

Αναζητούμε $p_n^* \in P_n$, δοθείσης $f \in C[a,b]$ τέτοια ώστε:

$\| f - p_n^* \| \leq \| f - p \|$, $\forall p \in P_n$

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ :

διακριτός χώρος

Αναζητούμε $p_n^* \in P_n$, δοθείσης $f \in E_m$ τέτοια ώστε:

$\| f - p_n^* \| \leq \| f - p \|$, $\forall p \in P_n$

Για ευκολία υποθέτουμε ως $\| \cdot \| = \| \cdot \|_\infty$.

ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΝΕΧΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ :

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύνολο σημείων $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$ λέμε ότι αποτελεί εναλλασσόμενο σύνολο σημείων για τη συνάρτηση σφάλμα $e = f - p_n^*$, αν:

$E_n(f) = \| f - p_n^* \| = | f(x_i) - p_n^*(x_i) |$, $\forall i = 0,1,\ldots,k$

και $f(x_i) - p_n^*(x_i) = -\left(f(x_{i+1}) - p_n^*(x_{i+1}) \right)$

ΘΕΩΡΗΜΑ :

Έστω $f \in C[a,b]$, τότε $p_n^* \in P_n$ είναι η βοπ της f στον P_n αν.ν υπάρχει ένα σύνολο εναλλασσόμενων σημείων $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leq b$ για τη συνάρτηση σφάλμα $e = f - p_n^*$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η βοπ της $f \in C[a,b]$ στον P_n είναι μοναδική

Άσκηση 1:

Να βρείτε τη ΒΟΠ της $f(x)=x^2-x$ ορισμένης στο $[0,2]$ στον P_1

ΛΥΣΗ

$p_1^* \in P_1 \Rightarrow p_1^*(x)=ax+b$.

Αναζητούμε σύνολο εναλλασσόμενων σημείων

$e(x)=f(x)-p_1^*(x)=x^2-x-ax-b=x^2-(1+a)x-b \Rightarrow$

$\Rightarrow e'(x)=2x-(1+a)=0 \Rightarrow x=\frac{1+a}{2}$

Και θέλουμε $x=\frac{1+a}{2}\in(0,2)$ ώστε μαζί με τα άκρα 0,2 να έχουμε σύνολο αποτελούμενο από τρία σημεία

Έτσι, $0<\frac{1+a}{2}<2$ είναι σύνολο εναλλασσόμενων σημείων αν.ν $e(0)=-e\left(\frac{1+a}{2}\right)=e(2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -b=-\left(\left(\frac{1+a}{2}\right)^2-\frac{(1+a)^2}{2}-b\right) \\ -\cancel{b}=2-2a-\cancel{b} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -b=\frac{(1+a)^2}{4}+b \\ a=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-\frac{1}{2} \\ a=1 \end{array}\right.$$

Άρα, $p_1^*(x)=x-\frac{1}{2}$.

Να πούμε ότι το μέγιστο σφάλμα της f:

$E(f)=\frac{1}{2}$ (διότι $e(0)=-\frac{1}{2}$, $e(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $e(2)=-\frac{1}{2}$)

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ CHEBYSCHEV

$T_n(x):=\cos(n\cdot\arccos x)$, $x=\cos\theta$, $x\in[-1,1]$

Έτσι, $T_0(x):=\cos 0=1$

και $T_1(x)=\cos(\overbrace{\arccos x}^{\theta})=\cos\theta=x$

Έτσι, $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) =$

$$= \cos((n+1)\arccos x) + \cos((n-1)\arccos x) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{n+1-(n-1)}{2}\arccos x\right)\cdot\cos\left(\frac{n+1+n-1}{2}\arccos x\right) =$$

$$= 2\cos(\arccos x)\cdot\cos(n\arccos x) =$$

$$= 2x\cdot\cos(n\cdot\arccos x) = 2x\,T_n(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)},\ \forall n\geq 1$$

$$T_2(x) = 2x\,T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x\,T_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2x\,T_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Επαγωγικά στο n έχουμε ότι ο συντελεστής μεγ. όρου του $T_n(x)$ είναι 2^{n-1}.

MINMAX ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Διατυπώνεται ως εξής:

$$\min_{p\in P_n^c}\left(\max_{x\in[-1,1]}|p(x)|\right) = \max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{c}{2^{n-1}}T_n(x)\right| = \frac{|c|}{2^{n-1}}.$$

όπου P_n^c: Το σύνολο των πολυωνύμων n βαθμού με συντελεστή μεγ. όρου το c.

Επειτα, αφού $T_n(x) = \cos(n\cdot\theta)$, $x=\cos\theta$, $x\in[-1,1]$ τότε στα σημεία $x_j = \cos\frac{\pi j}{n}$, $j=0,1,\dots,n$ είναι:

$$T_n(x_j) = \cos(n\arccos x_j) = \cos\left(n\frac{\pi j}{n}\right) = \cos\pi j = (-1)^j$$

άρα το $T_n(x_j)$ έχει εναλλασσόμενο πρόσημο από σημείο σε σημείο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Θεωρούμε $p \in P_{n+1}^{c}$ και ψάχνουμε την βοπ $p_n^* \in P_n$ του p στο $[-1,1]$ στον P_n τότε θα έχουμε ότι το $e(x) = p(x) - p_n^*(x) \in P_{n+1}$, έχει εναλλασσόμενο σύνολο από $n+2$ σημεία και συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου ίδιο με του p, δηλαδή c όμως η βοπ είναι μοναδική τότε αναγκαστικά το σφάλμα

$e(x) = \frac{c}{2^n} T_{n+1}(x)$, με συντελεστή μεγ. όρου του $T_{n+1}(x)$ το 2^n. $\Rightarrow$ $$\boxed{p_n^*(x) = p(x) - \frac{c}{2^n} T_{n+1}(x)} \quad (*)$$

Παράδειγμα

Ποια η βοπ της $x^4 \in C[-1,1]$, στον P_3 με $x^4 \in P_4^1$;

ΛΥΣΗ

Βάση του τύπου (*) (προσοχή $n+1=4 \Rightarrow n=3$)

$$p_3^*(x) = x^4 - \frac{1}{2^3} T_4(x) = x^4 - \frac{1}{8} \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1) = x^2 - \frac{1}{8}.$$

Τι γίνεται σε περίπτωση όπου το διάστημα ορισμού της συνάρτησης προς προσέγγιση είναι $[a,b]$ και ΟΧΙ $[-1,1]$ που αναφέρουν τα CHEBYCHEV;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Το ίδιο πρόβλημα με παραπάνω αλλά η βοπ. ορίζεται σε τυχαίο διάστημα $[a,b]$ στον P_n

Τότε χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό:

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2} \quad \text{ώστε} \quad [a,\beta] \longrightarrow [-1,1]$$

Τότε, $q(t) = p(x(t)) \in P_{n+1}^{c'}$ ορίζεται στο $[-1,1]$

και $c' = c\left[\frac{b-a}{2}\right]^{n+1}$. Μετά με χρήση πολ/ων CHEBYSCHEV βρίσκουμε τη ΒΟΠ $q(t)$: $q_n^*(t)$ στο $[-1,1]$ και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό: $t = \frac{2}{b-a} x - \frac{b+a}{b-a}$ και λαμβάνουμε τη ΒΟΠ του $p \in P_{n+1}^{c}$, στον P_n ως:

$$p_n^*(x) = q_n^*(t(x)) \text{ ορισμένη στο } [a,b].$$

Άσκηση 2 (ΘΕΜΑ 1ο ΙΟΥΝΙΟΣ 2014)

i) Ποια η ΒΟΠ της x^2+1, στο $[-1,1]$ στον P_1 κάνοντας χρήση πολυωνύμων CHEBYSCHEV.

ii) Ποια η ΒΟΠ της ίδιας συνάρτησης στον P_0, γιατί;

ΛΥΣΗ

i) Εύκολα τα πράγματα αφού ορίζεται στο $[-1,1]$ όπως άλλωστε επιβάλλουν τα πολυώνυμα CHEBYSCHEV.

$n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$

$$p_1^*(x) = x^2+1 - \frac{1}{2^1} T_2(x) = x^2+1 - \frac{1}{2}(2x^2-1) = \frac{3}{2}$$

ii) Προφανώς αφού $p_1^*(x)$ είναι μηδενικού βαθμού θα είναι και η ΒΟΠ στον P_0.

Άσκηση 1 (β' τρόπος με Πολυώνυμα CHEBYSCHEV)

Το διάστημα είναι το $[0,2] \not\equiv [-1,1]$.

Άρα χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό:

$$x = \frac{2-0}{2}t + \frac{2+0}{2} \Leftrightarrow x = t+1 \quad (*)$$

Έτσι, $q(t) = f(x(t)) = f(t+1) = (t+1)^2 - (t+1) = t^2+t, \ \forall t \in [-1,1]$

c: συντελ. μεγ. όρου

Άρα, $c' = \left[\frac{2-0}{2}\right]^2 \cdot 1 = 1$

Συνεπώς, $q_1^*(t) = q(t) - \frac{1}{2}\cdot T_2(t) =$

$$= t^2+t-\frac{1}{2}(2t^2-1) = t+\frac{1}{2}$$ ← βοπ της $q(t)$

Τώρα κάνοντας χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού του (*) παίρνουμε $t = x-1$.

άρα $p_1^*(x) = q_1^*(t(x)) = (x-1)+\frac{1}{2} = x-\frac{1}{2}$.